# Musterlösungen zu quadratischen Gleichungen und Parabeln

**Aufgabe 1:**
Die Lösung wird mit Hilfe der p-q-Formel dargestellt.
Die Gleichungen können auch mit Hilfe der abc-Formel gelöst werden. Die Lösungen sind jeweils die gleichen.

a) $4x^2 + 17x - 15 = 0 \quad | : 4$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{15}{4} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{17}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{8}\right)^2 + \frac{15}{4}} = -\frac{17}{8} \pm \frac{23}{8}$

Daraus folgt $x_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ und $x_2 = -\frac{40}{8} = -5$

b) $10x^2 - 13x - 144 = 0 \quad | :10$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{13}{10}x - \frac{72}{5} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = \frac{13}{20} \pm \sqrt{\left(-\frac{13}{20}\right)^2 + \frac{72}{5}} = \frac{13}{20} \pm \frac{77}{20}$

Daraus folgt $x_1 = \frac{90}{20} = \frac{9}{2}$ und $x_2 = -\frac{64}{20} = -\frac{16}{5}$

c) $20x^2 + 31x + 12 = 0 \quad | : 20$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{31}{20}x + \frac{3}{5} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{31}{40} \pm \sqrt{\left(\frac{31}{40}\right)^2 - \frac{3}{5}} = -\frac{31}{40} \pm \frac{1}{40}$

Daraus folgt $x_1 = -\frac{30}{40} = -\frac{3}{4}$ und $x_2 = -\frac{32}{40} = -\frac{4}{5}$

d) $2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad | : 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 1{,}5x + 0{,}5 = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = 0{,}75 \pm \sqrt{(-0{,}75)^2 - 0{,}5} = 0{,}75 \pm 0{,}25$

Daraus folgt $x_1 = 1$ und $x_2 = 0{,}5$

e) $(2x - 17) \cdot (x - 5) - (3x + 1) \cdot (x - 7) = 84$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x - 17x + 85 - (3x^2 - 21x + x - 7) = 84$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 27x + 85 - 3x^2 + 21x - x + 7 = 84$

$\Leftrightarrow -x^2 - 7x + 8 = 0 \quad | : (-1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 7x - 8 = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = -3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 + 8} = -3{,}5 \pm 4{,}5$

Daraus folgt $x_1 = 1$ und $x_2 = -8$

f) $(2x-5)^2 - 80 = (x-6)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 - 80 = x^2 - 12x + 36$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 91 = 0 \quad | :3$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{91}{3} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{91}{3}} = \frac{4}{3} \pm \frac{17}{3}$

Daraus folgt $x_1 = 7$ und $x_2 = -\frac{13}{3}$

g) $(1+3x)(1-3x) - x(x+1) = 2x^2$

$\Leftrightarrow 1 - 9x^2 - x^2 - x = 2x^2$

$\Leftrightarrow -12x^2 - x + 1 = 0 \quad | : (-12)$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0$

p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{1}{24} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2 + \frac{1}{12}} = -\frac{1}{24} \pm \frac{7}{24}$

Daraus folgt $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$

**Aufgabe 2:**

a) $f(x) = 0{,}4x^2 + 3$

Die Parabel besitzt den Scheitelpunkt S(0/3). Sie ist nach oben geöffnet und flacher als eine Normalparabel.

b) $f(x) = (x+2)^2 + 5$

Die Parabel besitzt den Scheitelpunkt S(-2/5). Sie ist nach oben geöffnet und ist eine Normalparabel.

c) $f(x) = -2(x-2)^2 - 2$

Die Parabel besitzt den Scheitelpunkt S(2/-2). Sie ist nach unten geöffnet und ist steiler als eine Normalparabel.

**Aufgabe 3:**

a) $f(x) = -x^2 - 1$

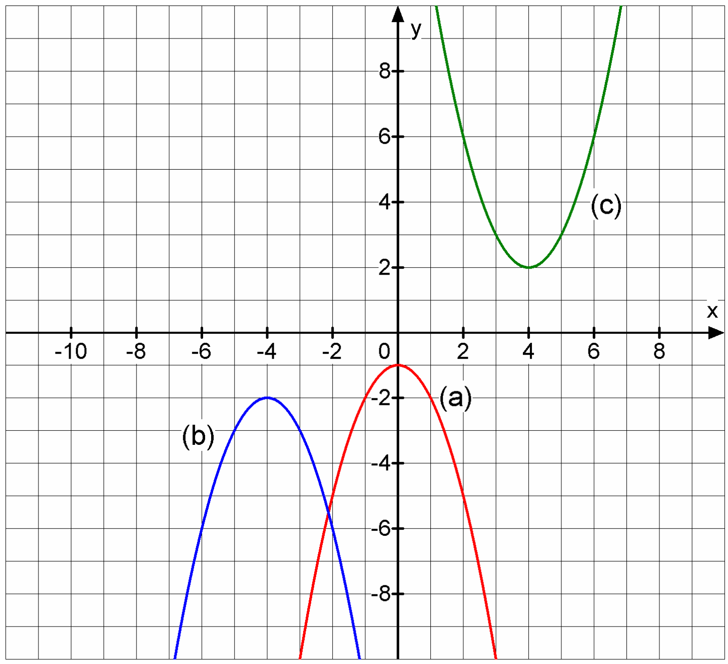
Es handelt sich um eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel S(0/-1).

b) $f(x) = -(x+4)^2 - 2$

Es handelt sich um eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel S(-4/-2).

c) $f(x) = (x-4)^2 + 2$

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel S(4/2).




**Aufgabe 4:**

a) $y = x^2 - 4x + 1$ (nach oben geöffnete Normalparabel)

Umformung in Scheitelform: $f(x) = (x-2)^2 - 4 + 1 \Leftrightarrow f(x) = (x-2)^2 - 3$

Der Scheitelpunkt lautet S(2/-3).

b) $y = -x^2 + 3x - 2 \quad | : (-1)$ (nach unten geöffnete Normalparabel)

$\Leftrightarrow \frac{y}{-1} = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow \frac{y}{-1} = (x-1{,}5)^2 - 2{,}25 + 2 \Leftrightarrow \frac{y}{-1} = (x-1{,}5)^2 - 0{,}25$

$\Leftrightarrow y = -(x-1{,}5)^2 + 0{,}25$

Der Scheitelpunkt lautet S(1,5/0,25).

c) $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2 \quad | : \frac{1}{3}$ (keine Normalparabel, nach oben geöffnet)

$\Leftrightarrow \frac{y}{\frac{1}{3}} = x^2 + 3x - 6 \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{1}{3}} = (x+1{,}5)^2 - 2{,}25 - 6 \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{1}{3}} = (x+1{,}5)^2 - 8{,}25$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x+1{,}5)^2 - 2{,}75$

Der Scheitelpunkt lautet S(-1,5/-2,75).

**Aufgabe 5:**

a) Der Scheitelpunkt der Normalparabel lautet S(2/0).

Die Gleichung der Parabel in Scheitelform lautet $y = -(x-2)^2$.

(Das Minuszeichen vor der Klammer ist erforderlich, da die Parabel nach unten geöffnet ist)

b) Der Scheitelpunkt der Normalparabel lautet S(-1/-6).

Die Gleichung der Parabel in Scheitelform lautet $y = (x+1)^2 - 6$

**Aufgabe 6:**

a) Der x-Wert des Scheitelpunktes befindet sich genau in der Mitte von beiden Nullstellen. Die Mitte von – 5 und 1 ist x = -2. Somit lautet der Scheitelpunkt S(2/y). Der y-Wert kann aufgrund der Angaben in der Aufgabe nicht bestimmt werden.

b) Wenn die Parabel nur eine Nullstelle hat, dann stimmt der Scheitelpunkt mit der Nullstelle überein, d.h. es gilt S(2/0).

**Aufgabe 7:**

a) $f(x) = (x-2{,}5)^2 - 2{,}25 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 5x + 6{,}25 - 2{,}25 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 5x + 4$

Test, ob A(0/-4) auf der Parabel liegt: $-4 = 0^2 - 5 \cdot 0 + 4$ ist falsch; A liegt nicht darauf

Test, ob B(-4/40) auf der Parabel liegt: $40 = (-4)^2 - 5 \cdot (-4) + 4$ ist richtig; B liegt darauf

b) $f(x) = -0{,}5(x+4)^2 + 4 \Leftrightarrow f(x) = -0{,}5(x^2 + 8x + 16) + 4 \Leftrightarrow f(x) = -0{,}5x^2 - 4x - 4$

Test, ob C(1/-8,5) auf der Parabel liegt: $-8{,}5 = -0{,}5 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 4$ ist richtig; C liegt darauf

Test, ob D(-2/-2) auf der Parabel liegt: $-2 = -0{,}5 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 4$ ist falsch; D liegt nicht darauf

**Aufgabe 8:**

Da der Scheitelpunkt bekannt ist, muss die Parabel in Scheitelform aufgestellt werden:

$f(x) = a \cdot (x-3)^2 - 2$

Der Wert von a kann nun aufgrund des bekannten Parabelpunktes O(0/0) berechnet werden:

Einsetzen von O(0/0): $0 = a \cdot (0-3)^2 - 2 \Leftrightarrow 0 = 9a - 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{9}$

Die Parabelgleichung lautet $f(x) = \frac{2}{9} \cdot (x-3)^2 - 2$

**Aufgabe 9:**

Parabel (1): Scheitelpunkt S(2/4), es ist eine nach oben geöffnete Normalparabel
Gleichung: $y = (x-2)^2 + 4$

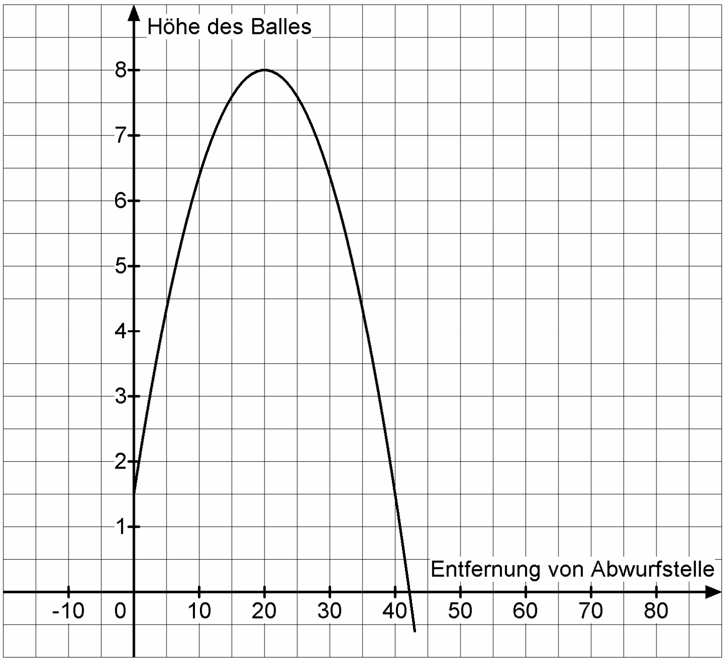
Parabel (2): Scheitelpunkt S(4/0), es ist eine nach unten geöffnete Normalparabel
Gleichung: $y = -(x-4)^2$

Parabel (3): Scheitelpunkt S(0/3), es ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Streckfaktor 2
Gleichung: $y = -2x^2 + 3$

Parabel (4): Scheitelpunkt S(-3/-1), es ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Streckfaktor 0,5
Gleichung: $y = 0{,}5(x+3)^2 - 1$

**Aufgabe 10:**

a) Schaubild:




b) Die Parabel besitzt den Scheitelpunkt S(20/8). Die Abwurfstelle des Balles sei an der Stelle x = 0. Also liegt auch der Punkt P(0/1,5) auf der Parabel.

Parabelgleichung: $y = a \cdot (x-20)^2 + 8$

Einsetzen von P(0/1,5): $1{,}5 = a \cdot (0-20)^2 + 8 \Leftrightarrow a = -0{,}01625$

Die Gleichung der Flugbahn lautet $y = -0{,}01625 \cdot (x-20)^2 + 8$

**Aufgabe 11:**

Es sei x die Anzahl der Preissenkungen um jeweils 0,50 €.
Bei x Preissenkungen beträgt der Eintrittspreis 10 – 0,5x.
Die Anzahl der Zuschauer nach x Preissenkungen beträgt 300 + 30x.

Die Gesamteinnahmen bei x Preissenkungen betragen $y = (10-0{,}5x) \cdot (300+30x)$

Daraus folgt $y = 3000 + 300x - 150x - 15x^2 \Leftrightarrow y = -15x^2 + 150x + 3000$

Da nun ermittelt werden soll, für welchen x-Wert der y-Wert möglichst groß wird, muss der Scheitelpunkt der Parabel ermittelt werden:

$$\frac{y}{-15} = x^2 - 10x - 200 \Leftrightarrow \frac{y}{-15} = (x-5)^2 - 25 - 200 \Leftrightarrow y = -15(x-5)^2 + 3375$$

Für x = 5 ergibt sich ein maximaler Wert von 3375.
Nach 5 Preissenkungen (d.h. Eintrittspreis = 7,50 €) betragen die maximalen Einnahmen 3.375€.

**Aufgabe 12:**
Fläche des Rechtecks = $13 \cdot 13 - 2 \cdot A_{kleinesDreieck} - 2 \cdot A_{großesDreieck}$

$$A_{kleinesDreieck} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$$

$$A_{großesDreieck} = \frac{1}{2} \cdot (13 - x) \cdot (13 - x) = \frac{1}{2}(169 - 26x + x^2) = 84{,}5 - 13x + 0{,}5x^2$$

$$A_{Rechteck} = 169 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot (84{,}5 - 13x + 0{,}5x^2) = 169 - x^2 - 169 + 26x - x^2 = -2x^2 + 26x$$

Da nun ermittelt werden soll, für welchen Wert von x die Fläche des Rechtecks maximal werden soll, wird von der Funktion der Scheitelpunkt berechnet.

$$y = -2x^2 + 26x \quad | : (-2)$$

$$\frac{y}{-2} = x^2 - 13x \Leftrightarrow \frac{y}{-2} = (x - 6{,}5)^2 - 42{,}25 \Leftrightarrow y = -2(x - 6{,}5)^2 + 84{,}5$$

Für x = 6,5 wird die Rechtecksfläche maximal 84,5 cm² groß.